

***Методичка***

**К экзамену по математике**

**Лектор: Холодова Светлана Евгеньевна**

***Раздел — Математический анализ (III)***

Контактировать автора по

поводу вопросов и фидбеков:

@XVIIstarPt, [bolorboldariguun16@gmail.com](mailto:bolorboldariguun16@gmail.com)

*Санкт-Петербург, 2024г.*

**ОГЛАВЛЕНИЕ**

[**Раздел 1. Функция с несколькими переменными** 5](#_Toc156749707)

[***Вопрос 1. Функции нескольких переменных. Понятие n-мерного координатного пространства. Область определения. Предел функции.*** 5](#_Toc156749708)

[***ФНП*** 5](#_Toc156749709)

[***-мерное координатное пространство*** 5](#_Toc156749710)

[***Область определения ФНП*** 5](#_Toc156749711)

[***Предел ФНП*** 5](#_Toc156749712)

[***Вопрос 2. Непрерывность функции нескольких переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях (арифметические операции над непрерывными функциями, непрерывность сложной функции, знакопостоянство непрерывной функции, о промежуточных значениях, ограниченности и достижении наименьшего и наибольшего значений).*** 5](#_Toc156749713)

[***Непрерывность ФНП*** 6](#_Toc156749714)

[***Вопрос 3. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал, частные производные. Геометрический и физический смысл частных производных. Необходимое и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.*** 6](#_Toc156749715)

[***Вопрос 4. Свойство инвариантности формы первого дифференциала функции нескольких переменных.*** 6](#_Toc156749716)

[***Вопрос 5. Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных.*** 6](#_Toc156749717)

[***Вопрос 6. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявной функции.*** 6](#_Toc156749718)

[***Вопрос 7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.*** 6](#_Toc156749719)

[***Вопрос 8. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования.*** 6](#_Toc156749720)

[***Вопрос 9. Дифференциалы высших порядков.*** 6](#_Toc156749721)

[***Вопрос 10. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.*** 7](#_Toc156749722)

[***Вопрос 11. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных.*** 7](#_Toc156749723)

[**Раздел 2. Интегрирование функции с несколькими переменными** 7](#_Toc156749724)

[***Вопрос 12. Двойной интеграл. Определение. Геометрический смысл. Вычисление с помощью повторного интегрирования. Основные свойства.*** 7](#_Toc156749725)

[***Вопрос 13. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.*** 7](#_Toc156749726)

[***Вопрос 14. Тройной интеграл. Определение. Вычисление с помощью повторного интегрирования. Основные свойства.*** 7](#_Toc156749727)

[***Вопрос 15. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.*** 7](#_Toc156749728)

[***Вопрос 16. Криволинейный интеграл первого рода. Определение. Основные свойства. Вычисление.*** 7](#_Toc156749729)

[***Вопрос 17. Криволинейный интеграл второго рода. Определение. Основные свойства. Вычисление.*** 8](#_Toc156749730)

[***Вопрос 18. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.*** 8](#_Toc156749731)

[***Вопрос 19. Формула Грина.*** 8](#_Toc156749732)

[***Вопрос 20. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.*** 8](#_Toc156749733)

[***Вопрос 21. Поверхностный интеграл первого рода. Определение. Вычисление. Свойства.*** 8](#_Toc156749734)

[***Вопрос 22. Поверхностный интеграл второго рода. Определение. Вычисление. Свойства.*** 8](#_Toc156749735)

[***Вопрос 23. Формула Остроградского-Гаусса.*** 8](#_Toc156749736)

[***Вопрос 24. Формула Стокса.*** 8](#_Toc156749737)

[***Вопрос 25. Скалярное поле. Поверхности уровня, линии уровня скалярного поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля, координатное и инвариантное определения.*** 8](#_Toc156749738)

[**Раздел 3. Дифференциальные уравнения** 8](#_Toc156749739)

[***Вопрос 26. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие уравнения и его решения. Поле направлений. Задача Коши. Теорема Пикара. Общее, частное и особое решения.*** 8](#_Toc156749740)

[***Вопрос 27. Методы интегрирования уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.*** 9](#_Toc156749741)

[***Вопрос 28. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.*** 9](#_Toc156749742)

[***Вопрос 29. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.*** 9](#_Toc156749743)

[***Вопрос 30. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.*** 9](#_Toc156749744)

[***Вопрос 31. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Задача Коши. Теорема Пикара. Понижение порядка уравнения. Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных. Уравнения, не содержащие независимой переменной.*** 9](#_Toc156749745)

[***Вопрос 32. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений линейного однородного уравнения. Фундаментальная система решений и определитель Вронского. Признак линейной независимости решений. Формула Остроградского – Лиувилля.*** 9](#_Toc156749746)

[***Вопрос 33. Построение общего решения линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Структура общего решения неоднородного уравнения. Принцип наложения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка. Случай уравнения n-го порядка.*** 10](#_Toc156749747)

[***Вопрос 34. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Нормальная система. Задача Коши. Механическое истолкование нормальной системы и ее решения. Теорема Пикара. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений 1-го порядка.*** 10](#_Toc156749748)

[***Вопрос 35. Линейные системы. Свойства линейных систем. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости вектор-функций. Формула Остроградского –Лиувилля.*** 10](#_Toc156749749)

[***Вопрос 36. Построение общего решения линейной однородной системы по фундаментальной системе решений. Интегрирование линейной однородной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера.*** 10](#_Toc156749750)

[***Вопрос 37. Структура общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).*** 11](#_Toc156749751)

[**Раздел 4. Теория функций комплексных переменных** 11](#_Toc156749752)

[***Вопрос 38. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.*** 11](#_Toc156749753)

[***Вопрос 39. Производная и дифференциал функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций комплексного переменного.*** 11](#_Toc156749754)

[***Вопрос 40. Аналитические функции. Свойства нулей аналитических функций. Теорема единственности. Принцип аналитического продолжения. Связь аналитических функций с гармоническими.*** 11](#_Toc156749755)

[***Вопрос 41. Элементарные функции комплексного переменного и их свойства.*** 11](#_Toc156749756)

[***Вопрос 42. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.*** 11](#_Toc156749757)

[***Вопрос 43. Интегральные теоремы Коши (для односвязной и для многосвязной областей).*** 12](#_Toc156749758)

[***Вопрос 44. Независимость интеграла от пути интегрирования.*** 12](#_Toc156749759)

[***Вопрос 45. Первообразная функции комплексного переменного. Неопределенный интеграл от функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница.*** 12](#_Toc156749760)

[***Вопрос 46. Интегральная формула Коши.*** 12](#_Toc156749761)

[***Вопрос 47. Высшие производные аналитической функции.*** 12](#_Toc156749762)

[***Вопрос 48. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Теорема Тейлора.*** 12](#_Toc156749763)

[***Вопрос 49. Ряды Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана.*** 12](#_Toc156749764)

[***Вопрос 50. Изолированные особые точки голоморфной функции. Их классификация посредством ряда Лорана. Устранимая особая точка и ее характеризация. Полюс и его характеризация. Существенно особая точка и ее характеризация.*** 12](#_Toc156749765)

[***Вопрос 51. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.*** 12](#_Toc156749766)

[***Вопрос 52. Вычеты в изолированных особых точках. Основная теорема теории вычетов. Вычисление вычетов в конечных особых точках.*** 13](#_Toc156749767)

[***Вопрос 53. Вычет относительно бесконечно удаленной особой точки. Теорема о сумме вычетов.*** 13](#_Toc156749768)

[***Вопрос 54. Вычисление криволинейных интегралов с использованием теории вычетов. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов от вещественных функций.*** 13](#_Toc156749769)

[***Вопрос 55. Вычисление несобственных интегралов с использованием теории вычетов. Леммы Жордана.*** 13](#_Toc156749770)

# **Раздел 1. Функция с несколькими переменными**

***Вопрос 1. Функции нескольких переменных. Понятие n-мерного координатного пространства. Область определения. Предел функции.***

***ФНП***

Рассматривая функции одного переменного, было известно, что при изучении многих явлений приходится встречаться с функциями двух и более независимых переменных.

Если каждой паре значений двух, независимых друг от друга, переменных величин и , из некоторой области их изменения , соответствует определённое значение величины , то мы говорим, что есть функция двух независимых переменных и , определённая в области .

Символически функция двух переменных обозначается функция так:

Конечно же, функции в математическом анализе не ограничиваются числом входных переменных:

***-мерное координатное пространство***

-мерное координатное пространство — математическая абстракция, которая обобщает понятие трёхмерного пространства на произвольное количество измерений. В трёхмерном пространстве у нас есть три взаимно перпендикулярных орта , и каждая точка может быть однозначно определена тремя координатами .

В -мерном координатном пространстве у нас есть взаимно перпендикулярных осей , и каждая точка может быть однозначно определена координатами .

Формально -мерное пространство обозначается как , где обозначает множество действительных чисел. Таким образом, представляет собой двумерное (плоское) координатное пространство, — трехмерное, и т.д.

***Область определения ФНП***

Совокупность множества значений , при которых определяется функция

называется областью определения или областью существования этой функции.

Область определения функции наглядно иллюстрируются геометрически. Если каждую, например, пару значений и мы будем изображать точкой в плоскости , то область определения функции изобразится в виде некоторой совокупности точек на плоскости. Эту совокупность точек будем также назвать областью определения функции.

***Предел ФНП***

Думаю, что вы все знакомы с классическим определением предела функции. Здесь почти так же.

Число называется пределом функции при стремлении точки к точке , если для каждого числа найдётся такое число , что для всех точек , для которых выполняется неравенство , имеет место неравенство

Если число является пределом функции при , то пишут:

***Вопрос 2. Непрерывность функции нескольких переменных. Основные теоремы о непрерывных функциях (арифметические операции над непрерывными функциями, непрерывность сложной функции, знакопостоянство непрерывной функции, о промежуточных значениях, ограниченности и достижении наименьшего и наибольшего значений).***

***Непрерывность ФНП***

Пусть точка принадлежит области определения функции . Функция называется непрерывным в точке , если имеет место равенство

причёмточка стремится к точке произвольным образом, оставаясь в области определения функции.

Еслиобозначить , то данное равенство можно переписать таким образом:

или

Замечая, далее, что выражение, стоящее в скобках в равенстве выше, есть полное приращение функции , равенство можно переписать в форме:

Функция, непрерывная в каждой точке некоторой области, называется непрерывной в области.

***Арифметические операции***

Арифметические операции над непрерывными функциями проводятся аналогично тому, как они проводятся над числами. Если есть две непрерывные функции и , то их сумма, разность, произведение и частное (при ) также будут непрерывными функциями.

***Непрерывность сложной функции***

Непрерывность сложной функции (композиции функций) также подчиняется некоторым правилам, основанным на непрерывности составляющих её функций.

Пусть у нас есть две функции и . Если функция непрерывна в точке , а функция непрерывна в точке (то есть значение лежит в области определения функции ), то их композиция будет непрерывной в точке .

Математически это можно записать следующим образом:

1. Если непрерывна в точке , то

.

1. Если непрерывна в точке , где , то

.

Из этих двух условий следует, что , что означает, что композиция также непрерывна в точке .

Пример:

Пусть и — непрерывные функции. Рассмотрим композицию . Если непрерывна в точке , и непрерывна в точке, то будет непрерывной в точке . Это свойство непрерывности композиции функций полезно в анализе и позволяет расширять результаты о непрерывности известных функций на более сложные выражения.

***Знакопостоянство***

Знакопостоянство для ФНП аналогично знакопостоянству для функций одной переменной, но теперь у нас есть несколько переменных. Рассмотрим ФНП .

1. Знакопостоянство в точке:

Пусть — точка в области . Функция считается положительной (отрицательной) в точке , если или .

1. Знакопостоянство на множестве:

Если для каждой точки из множества (или), то считается положительной (отрицательной) на множестве .

1. Знакопостоянство на отрезке линии:

Пусть и — две точки в области , соединённые линией. Если для всех точек на линии, соединяющей и , (или), то считается положительной (отрицательной) на этой линии.

***Теорема о промежуточных значениях***

Теорема о промежуточных значениях для функций нескольких переменных (ФНП) является аналогом теоремы для функций одной переменной и утверждает, что если функция непрерывна на некотором интервале (в данном случае - на связном множестве), то она принимает все промежуточные значения между значениями в двух конечных точках этого интервала.

Формально, пусть непрерывна на связном множестве . Пусть и — две точки в области , и пусть — число, лежащее между и . Тогда существует точка на отрезке между и , такая, что .

Это утверждение подчеркивает важность связности множества. Если множество разрывное, то теорема может не выполняться. Она зависит от того, что функция сохраняет свою непрерывность на всем интервале между точками.

***Ограниченность и достижение экстремумов***

Теорема об ограниченности и достижении экстремумов для функций нескольких переменных утверждает, что если функция непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве, то она ограничена и достигает как минимум и как максимум на этом множестве.

Формально, пусть непрерывна на замкнутом и ограниченном множестве . Тогда существуют точки и из , такие, что:

для всех из .

Эта теорема подчеркивает важность свойства компактности (ограниченности и замкнутости) множества, так как на бесконечных множествах она может не выполняться. Также важно отметить, что точки минимума и максимума могут быть не единственными.

Процесс поиска точек минимума и максимума функции нескольких переменных включает в себя как правило вторых производных (используя матрицу Гессе), анализ критических точек (где градиент равен нулю) и применение теоремы об ограниченности.

***Вопрос 3. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Полный дифференциал, частные производные. Геометрический и физический смысл частных производных. Необходимое и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.***

***Дифференцируемость ФНП***

Дифференцируемость функции нескольких переменных подразумевает существование всех частных производных функции в каждой точке области определения. Давайте рассмотрим дифференцируемость для ФНП более подробно.

Пусть у нас есть функция , где — область определения функции. Функция считается дифференцируемой в точка из , если существуют все частные производные функции в точке . Это означает, что для каждой переменной функции существует частная производная в точке .

Важно отметить следующие:

***Полный дифференциал***

Полный дифференциал функции нескольких переменных используется для линейной аппроксимации приращения функции относительно изменений её переменных. Если функция дифференцируема в точке , то полный дифференциал может быть выражен следующим образом:

где — частное приращение функции по соответствующей переменной, а — соответствующее приращение переменной .

Если записать это в векторной форме, то можно использовать градиент функции и вектор приращений переменных :

Эта формула позволяет линейно аппроксимировать приращение функции при малых изменениях переменных. Градиент указывает направление наибольшего возрастания функции в точке , а представляет вектор приращений переменных.

По формальному определению, главная часть полного приращения функции называется полным дифференциалом функции :

Надо учитывать следующие:

***Частные производные функции***

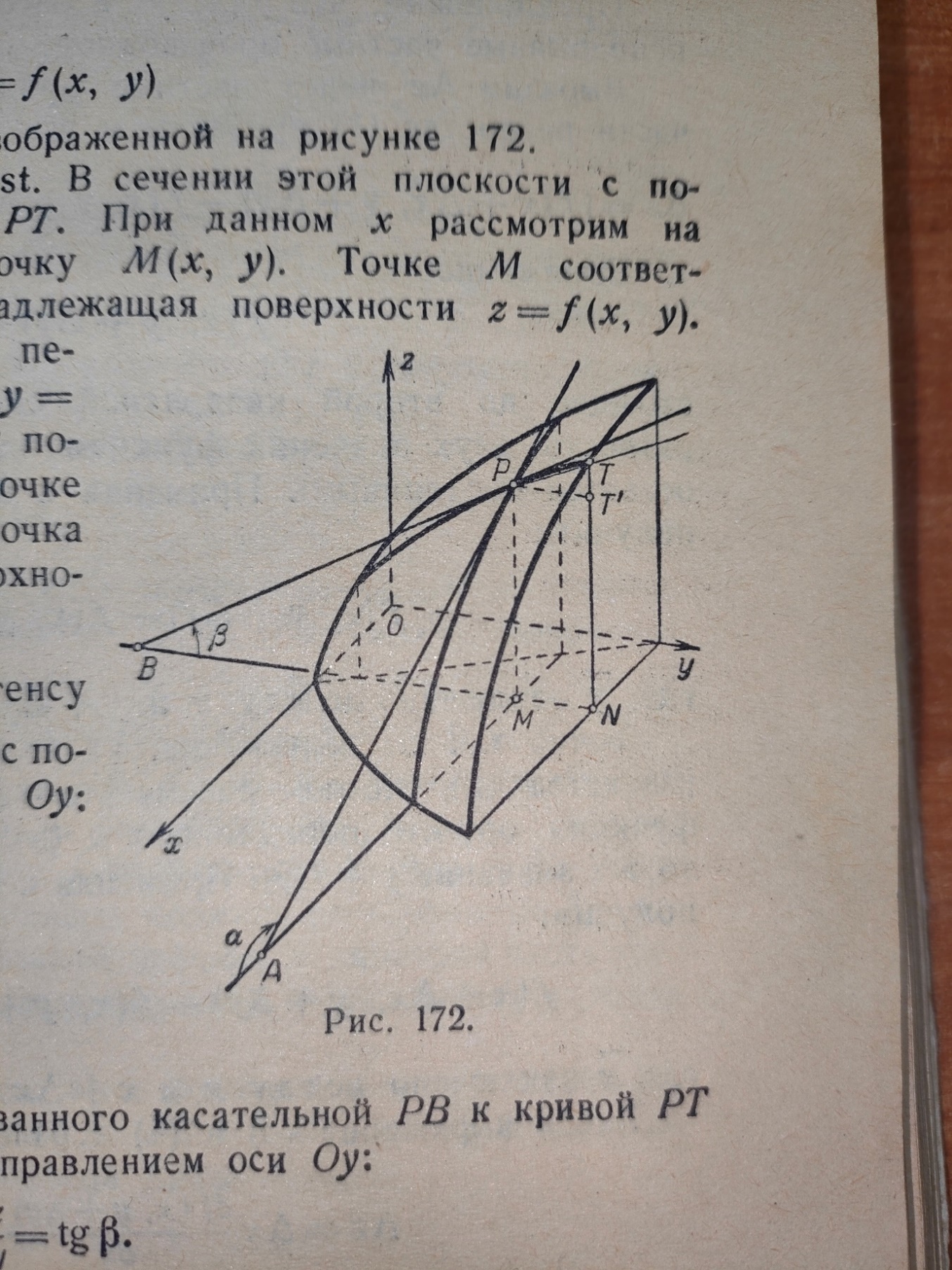
Частной производной по от функций называется предел отношения частного приращения по к приращению при стремлении к нулю.

Пусть у нас есть функция, где — область определения функции. При этом зависит от переменных .

Частная производная функции по одной из её переменных, скажем, ​, обозначается как ​и вычисляется так, как если бы все остальные переменные были константами. Формально:

Здесь происходит приращение только одной переменной по значению . В случае :

***Геометрический и физический смысл частных производных***

Пусть уравнение есть уравнение поверхности, изображенной на рисунке 172.

Проведём плоскость В сечении этой плоскости с поверхностью получится линия . При данном рассмотрим на плоскости некоторую точку . Точке соответствует точка , принадлежащая поверхности . Оставляя неизменным, дадим переменному приращение . Тогда функция получит приращение [точке соответствует точка на поверхности ].

Отношение равно тангенсу угла, образуемого секущей с положительным направлением оси :

Следовательно*,* предел

равен тангенсу угла , образованного касательной к кривой в точке с положительным направлением оси :

Итак, частная производная численно равна тангенсу угла наклона касательной к кривой, получающейся в сечении поверхности плоскостью

Аналогично частная производная численно равна тангенсу угла наклона касательной к сечению поверхности плоскостью

В физическом смысле под частным производным подразумевается скорость изменения какого-либо величины или процесса, но в таком случае его также можно применить при оценки погрешности.

***Необходимое и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных***

*Th.* *Если функция n переменных дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в этой точке и имеет в ней конечные частные производные по всем переменным.*

**Доказательство:**

Пусть функция дифференцируема в точке из области определения По определению её полное приращение

можно представить в виде:

Следовательно:

1. Приращения при всех , . Это ясно из того, что — бесконечно малая при , , а поскольку — некоторые числа, то и при , .
2. Если положить , то равенство (1) можно записать в виде или и перейти к пределу при . Тогда , что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать существование конечных частных производных , , …, .

*Th. Если функция определена на множестве и имеет в точке непрерывные частные производные по всем переменным , то она в этой точке дифференцируема.*

**Доказательство:**

При доказательстве ограничимся случаем функции двух переменных. Для функции большего числа переменных доказательство будет аналогичным.

Для функции полное приращение в точке имеет вид:

Прибавим и вычтем в левой части этого соотношения значение функции . Тогда можно записать в следующем виде:

Применяя [теорему Лагранжа](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A2%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B5%D0%BC%D0%B0_%D0%9B%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BD%D0%B6%D0%B0) к разностям функций одной переменной, стоящих в скобках, получим:

где . Ясно, что при и при . Поскольку частные производные непрерывны, то

откуда следует, что и , где и — бесконечно малые функции при и . Учитывая это, соотношение (2) можно переписать в следующем виде

Заметим*,* что выражение представляет собой бесконечно малую функцию при и , имеющую более высокий порядок, чем и . Если обозначить эту бесконечно малую функцию , где , то полное приращение функции запишется в виде:

где и — вещественные числа, а — бесконечно малая при и , более высокого порядка, чем . Следовательно, функция дифференцируема в точке .

***Вопрос 4. Свойство инвариантности формы первого дифференциала функции нескольких переменных.***

Инвариантность формы первого дифференциала для функций нескольких переменных обозначает, что форма выражения первого дифференциала функции не изменяется при замене переменных.

Рассмотрим функцию и точку в области определения функции. Первый дифференциал функции в точке записывается следующим образом:

где — частное производные функции по соответствующей переменной, а — соответствующее приращение переменной .

Теперь, предположим, что у нас есть новая система переменных, которые связаны с исходными переменными ​ следующим образом:

где — функции, определённые в некоторой окрестности точки .

Тогда, если дифференцируема по переменным , в точке , то мы можем выразить дифференциал в новых переменных :

где — обратная функция к .

Таким образом, форма выражения первого дифференциала остаётся неизменной при переходе к новым переменным . Это свойство называется инвариантностью формы первого дифференциала относительно замены переменных.

***Вопрос 5. Дифференцируемость сложной функции нескольких переменных.***

*Th.* Если существует функция и она дифференцируема в точке , параметрические функции и тоже дифференцируемы в функции по в некоторой область изменения переменного так, что и , то называется полной производной функций .

**Доказательство:**

Пусть существует параметрическая переменная так, что

Тогда:

Значит предел будет равен:

и так как последние две пределы обращаются в ноль, то:

что и требовалось доказать.

Рассмотрим пример:

***Вопрос 6. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявной функции.***

***Неявные функции***

Неявные функции нескольких переменных задаются уравнениями, в которых переменные не выражены явно. Это означает, что уравнение содержит неявное определение одной или нескольких переменных через другие. Например, уравнение вида , где — функция двух переменных, может определять неявную функцию относительно .

Пример неявного определения функции относительно :

***Теоремы существования***

*Th.* Если функция и ее частные производные непрерывны в окрестности точки и , то в некоторой окрестности этой

точки существует уникальная функция , такая что .

**Доказательство.**

***Вопрос 7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных.***

***Вопрос 8. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования.***

***Вопрос 9. Дифференциалы высших порядков.***

***Вопрос 10. Формула Тейлора для функции нескольких переменных.***

***Вопрос 11. Экстремум функции нескольких переменных. Необходимые и достаточные условия экстремума. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Наименьшее и наибольшее значения функции нескольких переменных.***

**Раздел 2. Интегрирование функции с несколькими переменными**

***Вопрос 12. Двойной интеграл. Определение. Геометрический смысл. Вычисление с помощью повторного интегрирования. Основные свойства.***

***Вопрос 13. Замена переменных в двойном интеграле. Полярные координаты.***

***Вопрос 14. Тройной интеграл. Определение. Вычисление с помощью повторного интегрирования. Основные свойства.***

***Вопрос 15. Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.***

***Вопрос 16. Криволинейный интеграл первого рода. Определение. Основные свойства. Вычисление.***

***Вопрос 17. Криволинейный интеграл второго рода. Определение. Основные свойства. Вычисление.***

***Вопрос 18. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода.***

***Вопрос 19. Формула Грина.***

***Вопрос 20. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.***

***Вопрос 21. Поверхностный интеграл первого рода. Определение. Вычисление. Свойства.***

***Вопрос 22. Поверхностный интеграл второго рода. Определение. Вычисление. Свойства.***

***Вопрос 23. Формула Остроградского-Гаусса.***

***Вопрос 24. Формула Стокса.***

***Вопрос 25. Скалярное поле. Поверхности уровня, линии уровня скалярного поля. Производная по направлению. Градиент скалярного поля, координатное и инвариантное определения.***

**Раздел 3. Дифференциальные уравнения**

***Вопрос 26. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие уравнения и его решения. Поле направлений. Задача Коши. Теорема Пикара. Общее, частное и особое решения.***

***Вопрос 27. Методы интегрирования уравнений первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные уравнения и уравнения, приводящиеся к однородным.***

***Вопрос 28. Линейные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли.***

***Вопрос 29. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.***

***Вопрос 30. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Уравнения Лагранжа и Клеро.***

***Вопрос 31. Дифференциальные уравнения высших порядков. Основные понятия и определения. Задача Коши. Теорема Пикара. Понижение порядка уравнения. Уравнения, не содержащие искомой функции и последовательных первых производных. Уравнения, не содержащие независимой переменной.***

***Вопрос 32. Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка. Свойства решений линейного однородного уравнения. Фундаментальная система решений и определитель Вронского. Признак линейной независимости решений. Формула Остроградского – Лиувилля.***

***Вопрос 33. Построение общего решения линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Структура общего решения неоднородного уравнения. Принцип наложения. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) для уравнения 2-го порядка. Случай уравнения n-го порядка.***

***Вопрос 34. Системы дифференциальных уравнений. Основные понятия и определения. Нормальная система. Задача Коши. Механическое истолкование нормальной системы и ее решения. Теорема Пикара. Связь между уравнениями высшего порядка и системами дифференциальных уравнений 1-го порядка.***

***Вопрос 35. Линейные системы. Свойства линейных систем. Фундаментальная матрица. Определитель Вронского. Критерий линейной независимости вектор-функций. Формула Остроградского –Лиувилля.***

***Вопрос 36. Построение общего решения линейной однородной системы по фундаментальной системе решений. Интегрирование линейной однородной системы с постоянными коэффициентами методом Эйлера.***

***Вопрос 37. Структура общего решения неоднородной линейной системы. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа).***

**Раздел 4. Теория функций комплексных переменных**

***Вопрос 38. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.***

***Вопрос 39. Производная и дифференциал функций комплексного переменного. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций комплексного переменного.***

***Вопрос 40. Аналитические функции. Свойства нулей аналитических функций. Теорема единственности. Принцип аналитического продолжения. Связь аналитических функций с гармоническими.***

***Вопрос 41. Элементарные функции комплексного переменного и их свойства.***

***Вопрос 42. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.***

***Вопрос 43. Интегральные теоремы Коши (для односвязной и для многосвязной областей).***

***Вопрос 44. Независимость интеграла от пути интегрирования.***

***Вопрос 45. Первообразная функции комплексного переменного. Неопределенный интеграл от функции комплексного переменного. Формула Ньютона-Лейбница.***

***Вопрос 46. Интегральная формула Коши.***

***Вопрос 47. Высшие производные аналитической функции.***

***Вопрос 48. Разложение аналитической функции в степенной ряд. Теорема Тейлора.***

***Вопрос 49. Ряды Лорана. Кольцо сходимости ряда Лорана. Теорема Лорана.***

***Вопрос 50. Изолированные особые точки голоморфной функции. Их классификация посредством ряда Лорана. Устранимая особая точка и ее характеризация. Полюс и его характеризация. Существенно особая точка и ее характеризация.***

***Вопрос 51. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки.***

***Вопрос 52. Вычеты в изолированных особых точках. Основная теорема теории вычетов. Вычисление вычетов в конечных особых точках.***

***Вопрос 53. Вычет относительно бесконечно удаленной особой точки. Теорема о сумме вычетов.***

***Вопрос 54. Вычисление криволинейных интегралов с использованием теории вычетов. Приложение теории вычетов к вычислению определенных интегралов от вещественных функций.***

***Вопрос 55. Вычисление несобственных интегралов с использованием теории вычетов. Леммы Жордана.***